ALGEBRA M2 - Lista 5

Formy liniowe, dwuliniowe i kwadratowe

Zad.1. Przez *funkcjonał liniowy* rozumiemy przekształcenie liniowe $\varphi : V \to \mathbb{K}$, gdzie V jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{K}$. Które z poniższych odwzorowań są funkcjonałami liniowymi?

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, zadane wzorem $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_3$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, zadane wzorem $\varphi(x_1, x_2) = x_1 x_2$
3. $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$, zadane wzorem $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g^2(t)dt$, gdzie $g(t) \in C[0,1]$ jest ustalona

Zad.2. Niech $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ będzie bazą w przestrzeni liniowej V. Wykazać, że zbiór funkcjonałów $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$, gdzie φ_i zadany jest następująco

$$\varphi_i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

jest bazą przestrzeni $V^* := L(V, \mathbb{K})$. Jest to tzw. baza *sprzężona* lub *dualna* do bazy B. Wywnioskować, że $\dim(V^*) = n$.

Zad.3. Przez *funkcjonał dwuliniowy* rozumiemy przekształcenie $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$, które spełnia warunki

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) &= \alpha_1 \varphi(v_1, w) + \alpha_2 \varphi(v_2, w) \\ \varphi(w, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= \alpha_1 \varphi(w, v_1) + \alpha_2 \varphi(w, v_2) \end{aligned}$$

dla dowolnych $v_1, v_2, w \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$. Które z podanych niżej funkcji są funkcjonałami dwuliniowymi na odpowiednich przestrzeniach liniowych?

1. $\varphi(u, v) = u^T \cdot v = u \circ v$ w przestrzeni $\mathbb{K}^n$,
2. $\varphi(u, v) = \mathrm{Re}(uv)$ w przestrzeni $\mathbb{C}$,
3. $\varphi(u, v) = \mathrm{Re}(u\overline{v})$ w przestrzeni $\mathbb{C}$,
4. $\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g'(t)dt$ w przestrzeni funkcji różniczkowalnych znikających w a oraz b,
5. $\varphi(f, g) = \int_a^b (f(t) + g(t))^2 dt$ w przestrzeni $C[a, b]$.

Wyrażenie postaci $\varphi(u, v)$ nazywa się *formą dwuliniową*. Które z form dwuliniowych w powyższych przykładach są *symetryczne*, tzn. $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$?

Zad.4. Niech forma dwuliniowa φ ma w pewnej (starej) bazie $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Znaleźć macierz tej formy w (nowej) bazie $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ jeżeli wzory przejścia ze starej bazy do nowej są postaci $f_1 = e_1 - e_2$, $f_2 = e_1 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

Zad.5. Stosując metodę Lagrange'a, sprowadzić podane formy kwadratowe w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ do postaci kanonicznej, a następnie do postaci normalnej.

$$2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

$$x_1x_2 + x_1x_3$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3$$

Wyznaczyć macierz przejścia z wyjściowej bazy do bazy kanonicznej.

Zad.6. Stosując metodę Jacobiego do tych form kwadratowych z zad. 5, dla których jest to możliwe, wyznaczyć ich postać kanoniczną.

Zad.7. Dla każdej z form kwadratowych z zadania 5 wyznaczyć jej rząd oraz zbadać czy jest ona dodatnio określona oraz istotnie dodatnio określona.

Romuald Lenczewski